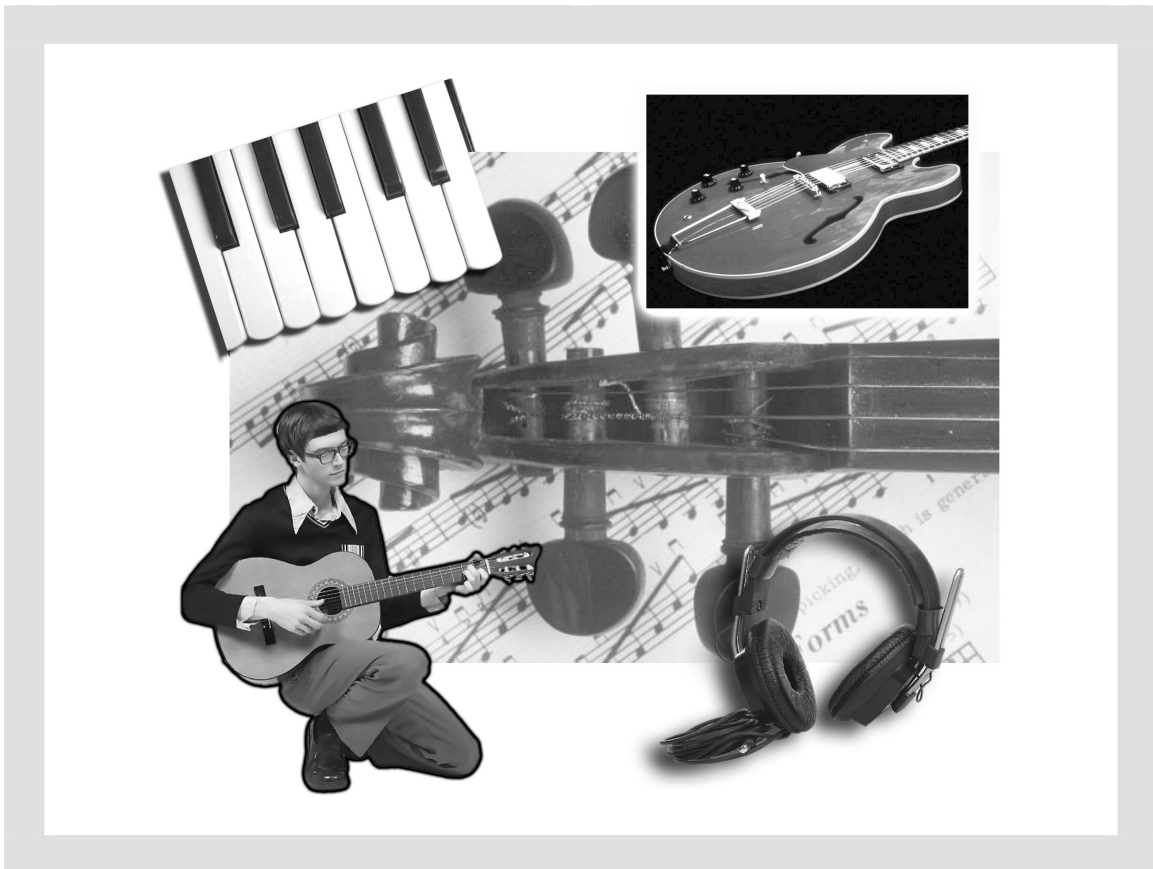


## *Mathématiques pures 30*

# Projet à l'intention des élèves : Les mathématiques et la musique



**Février 2007**

*Dans le présent document, le générique masculin est utilisé sans aucune discrimination et uniquement dans le but d'alléger le texte.*

© 2007, la Couronne du chef de l'Alberta représentée par le ministre de l'Éducation, Alberta Education, Learner Assessment, 44 Capital Boulevard, 10044 108 Street NW, Edmonton, Alberta T5J 5E6, et les détenteurs de licence. Tous droits réservés. On peut télécharger des exemplaires supplémentaires de ce document en visitant le site Web de Alberta Education, à [www.education.gov.ab.ca](http://www.education.gov.ab.ca).

**Par la présente**, le détenteur des droits d'auteur autorise **seulement les éducateurs de l'Alberta** à reproduire, à des fins éducatives et sans but lucratif, les parties de ce document **qui ne contiennent pas d'extraits**.

Les extraits de textes de ce document **ne peuvent pas** être reproduits sans l'autorisation écrite de l'éditeur original (voir page de références bibliographiques, s'il y a lieu).

# Mathématiques pures 30

## Projet : Les mathématiques et la musique

### Tâche de l'élève

Les mathématiques et la musique sont des sujets interconnectés. Dans son livre *Math and Music: Harmonious Connections*, Charity Kahn (1995) écrivait : « La musique offre aux mathématiques de la beauté et une dimension supplémentaire, en apportant de la vie et de l'émotion aux nombres et aux régularités. » Les concepts et les équations mathématiques sont liés à la conception et à la forme des instruments de musique, aux échelles d'intervalles et aux compositions musicales ainsi qu'aux diverses propriétés du son et de la production des sons.

Ce projet vous permettra d'explorer plusieurs aspects des mathématiques qui sont liés aux concepts de la musique.

### Clavier de piano

Pour la Partie A et la Partie B de ce projet, il est important d'avoir certaines connaissances sur le clavier du piano, qui est illustré ci-contre.

Ce clavier a 88 touches dont 36 sont noires et 52 sont blanches. À partir de la touche 1 (A0) à gauche du clavier (en haut de l'illustration), chaque touche successive produit un son avec une certaine fréquence qui est plus haute que celle du son produit par la touche précédente, à un intervalle fixe appelé demi-ton. Les fréquences augmentent de gauche à droite. Quelques exemples de noms de touches sont A0, A0#, B0, C1, C1#.

Dans ce projet, on va nommer « dièses » (#) toutes les touches noires. On va aussi utiliser une notation mathématique (A, B, C, ...) pour les touches du piano et pour les cordes de la guitare. On ne va pas utiliser la notation musicale (do, ré, mi, ...).

### Touches blanches

### Touches noires

Nom de la touche (notation mathématique)	Numéro de la touche	Gauche	Numéro de la touche	Nom de la touche (notation mathématique)
A0	1		2	A0#
B0	3			
C1	4		5	C1#
D1	6		7	D1#
E1	8			
F1	9			
G1	11		10	F1#
A1	13		12	G1#
B1	15		14	A1#
C2	16			
D2	18		17	C2#
E2	20		19	D2#
F2	21			
G2	23		22	F2#
A2	25		24	G2#
B2	27		26	A2#
C3	28			
D3	30		29	C3#
E3	32		31	D3#
F3	33			
G3	35		34	F3#
A3	37		36	G3#
B3	39		38	A3#
C4	40	Do (C) central		
D4	42		41	C4#
E4	44		43	D4#
F4	45			
G4	47		46	F4#
A4	49		48	G4#
B4	51		50	A4#
C5	52			
D5	54		53	C5#
E5	56		55	D5#
F5	57			
G5	59		58	F5#
A5	61		60	G5#
B5	63		62	A5#
C6	64			
D6	66		65	C6#
E6	68		67	D6#
F6	69			
G6	71		70	F6#
A6	73		72	G6#
B6	75		74	A6#
C7	76			
D7	78		77	C7#
E7	80		79	D7#
F7	81			
G7	83		82	F7#
A7	85		84	G7#
B7	87		86	A7#
C8	88			

Droite

## Partie A

Les fréquences de tous les sons successifs produits par les touches du clavier d'un piano forment une régularité. Le diagramme à gauche ci-dessous montre les 12 premières touches d'un piano. Le tableau à droite montre la fréquence du son produit par chaque touche, au millième d'un Hertz (Hz) près.

Nom de la touche	A0#	C1#	D1#	F1#	G1#		
Numéro de la touche	2	5	7	10	12		
Numéro de la touche	1	3	4	6	8	9	11
Nom de la touche	A0	B0	C1	D1	E1	F1	G1

Nom de la touche	Numéro de la touche	Fréquence (Hz)
A0	1	27,500
A0#	2	29,135
B0	3	30,868
C1	4	32,703
C1#	5	34,648
D1	6	36,708
D1#	7	38,891
E1	8	41,203
F1	9	43,654
F1#	10	46,249
G1	11	48,999
G1#	12	51,913

- La fréquence des sons produits par les touches d'un piano peut être représentée par une fonction de régression exponentielle.
  - Utilisez votre calculatrice pour entrer les 12 numéros de touche (1, 2, 3, ..., 12) dans la liste  $L_1$ , et les fréquences correspondantes (27.500, 29.135, ..., 51.913) dans la liste  $L_2$ . Tracez le graphique de  $L_2$  en fonction de  $L_1$  en utilisant un rectangle d'affichage approprié.
  - Déterminez la fonction de régression exponentielle qui représente votre graphique. Écrivez cette fonction sous la forme  $y = ab^x$ , où les valeurs  $a$  et  $b$  sont arrondies à sept décimales.
  - Étant donné la fonction de régression exponentielle que vous avez déterminée, quel est le taux d'augmentation de la fréquence produite par n'importe quelles deux touches successives?

2. La fréquence des sons produits par les touches d'un piano peut être aussi représentée par une suite géométrique. On peut déterminer la façon de représenter cette fréquence en utilisant une paire de touches portant la même lettre et des numéros consécutifs; par exemple, A0 et A1, ou B1 et B2, ou G2# et G3#. Chaque paire de touches consécutives portant la même lettre a des fréquences ayant un rapport de 2:1.

En d'autres mots, la fréquence de A1 (55,000 Hz) est double par rapport à la fréquence de A0 (27,500 Hz), la fréquence de A2 (110,000 Hz) est double par rapport à la fréquence de A1 (55,000 Hz) et ainsi de suite.

- Soit une suite géométrique dont le premier terme est 27,500 (fréquence de la touche 1, A0) et dont le treizième terme est 55,000 (fréquence de la touche 13, A1). Quelle est la raison géométrique,  $r$ , sous forme de valeur exacte et sous forme de valeur approximative à sept décimales près?
  - Écrivez la formule du terme général,  $t_n = ar^{n-1}$ , qui décrit la régularité géométrique des fréquences des sons successifs produits par les touches d'un piano.
3. Identifiez lequel des deux modèles d'équations décrit de la façon la plus appropriée la régularité d'augmentation de la fréquence des sons produits par les touches d'un piano. Justifiez votre choix par une explication.
4. a. En utilisant votre formule de la suite géométrique de la question 2, déterminez la fréquence qui correspond au son représenté par
- la touche 35 (G3)
  - la touche 52 (C5)
- b. Quelle est la gamme de fréquences que peuvent produire les touches d'un piano?
5. • Réécrivez l'équation  $t_n = ar^{n-1}$  pour trouver une expression qui est égale à  $n$ . Dans l'équation réécrite, substituez  $a = 27,5$  et  $r = \sqrt[12]{2}$ .
6. Sur un piano qui est légèrement désaccordé, le fait de toucher une seule touche produit une fréquence de 783,5 Hz. Utilisez l'équation de la question 5 pour déterminer le numéro de la touche qui correspond le mieux à un son ayant cette fréquence.

## **Partie B**

Pour accorder des instruments de musique tels que le piano, le violon ou la guitare, on se sert d'un diapason ou d'un dispositif d'accordage électronique afin de produire un ton pur qui a une fréquence spécifique.

Le diapason utilisé le plus souvent est celui qui produit une note dont la fréquence est de 440 Hz (A4) lorsqu'on le fait vibrer en le frappant. Ce diapason produit une onde sonore dont les variations de pression peuvent être représentées par une fonction sinusoïdale de la forme

$$P = a \sin(2\pi f t),$$

où  $P$  = la variation de pression de l'onde sonore en pascals (Pa)  
 $a$  = l'amplitude de l'onde sonore en pascals  
 $f$  = la fréquence de l'onde sonore en Hertz (Hz)  
 $t$  = le temps en secondes

1. On accorde un violon avec un diapason qui produit une note dont la fréquence est de 440 Hz (A4). L'onde sonore produite par le diapason a une amplitude de 0,10 Pa. Cette onde sonore peut être représentée par la fonction

$$P = 0,10 \sin(880\pi t).$$

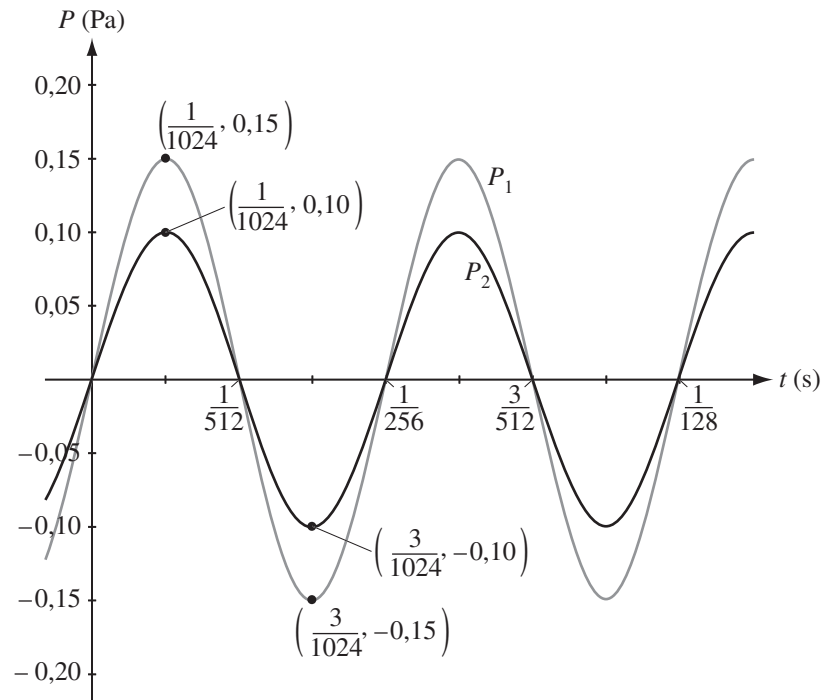
- En vous servant de votre calculatrice à affichage graphique en mode radian et avec le rectangle d'affichage suivant

$$x : [0, 0.005, 0.0005] \quad y : [-0.15, 0.15, 0.005],$$

tracez le graphique de cette fonction. Nommez chaque axe et indiquez l'échelle utilisée.

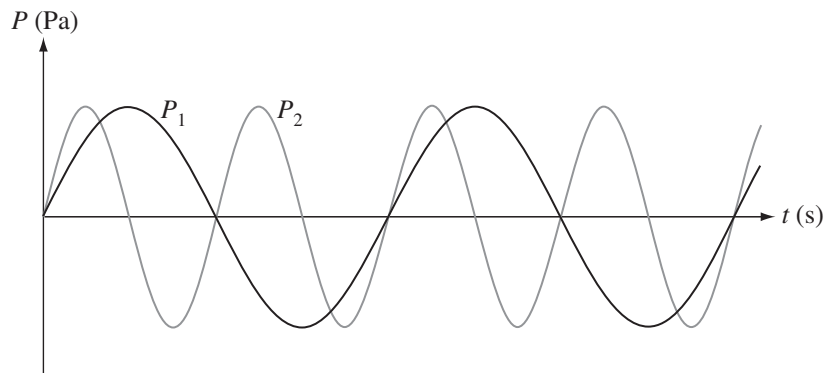
- Énoncez le domaine, l'image et la période de l'onde sonore représentée par la fonction  $P = 0,10 \sin(880\pi t)$ .
- La fréquence de l'onde sonore,  $f$ , est définie en termes de cycles/seconde ou de Hertz et la période de l'onde sonore,  $T$ , est définie en termes de secondes/cycle. Décrivez l'identité qui exprime la relation entre la fréquence et la période. Vérifiez cette identité en utilisant la fréquence et la période de l'onde sonore représentée par  $P = 0,10 \sin(880\pi t)$ .

2. On utilise un autre diapason avec une fréquence différente pour accorder un son (touche) sur un piano. On frappe le diapason deux fois, chaque fois avec une force différente. Sur le plan cartésien ci-dessous, on montre un graphique qui représente chacune des ondes sonores produites.



- Expliquez les ressemblances et les différences entre les propriétés des deux ondes sonores.
- Écrivez une équation qui décrit le graphique de  $P_1$  sous la forme  $P = a \sin(2\pi f t)$ .
- En utilisant l'équation de la Partie A, question 5, déterminez le numéro de la touche qu'on a probablement accordée.

3. On a frappé une fois deux diapasons différents. Sur le plan cartésien ci-dessous, on montre les courbes qui représentent chacune des ondes produites.



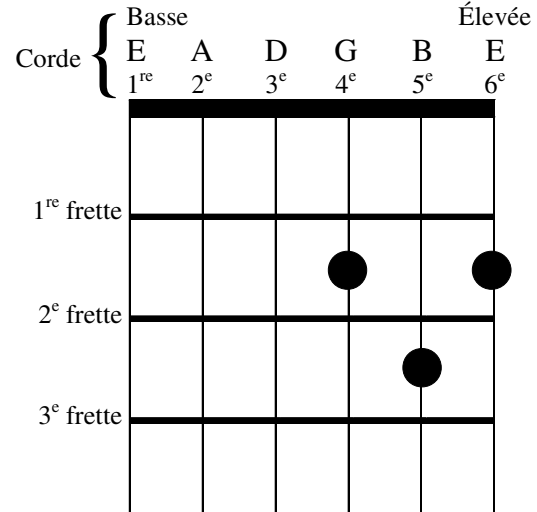
- Expliquez comment on peut utiliser les propriétés des deux ondes sonores pour identifier une paire possible de touches qu'on a accordées.

## Partie C

### Contexte

Un guitariste droitier joue un accord en plaçant d'abord ses doigts de la main gauche dans des positions particulières au long du manche de la guitare. Ensuite, il pince ou fait vibrer quelques cordes avec quatre doigts de la main droite pour jouer un accord.

Un guitariste veut jouer un accord de *ré* (D) en se servant de ses doigts de la main gauche pour presser les 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> cordes, comme dans le diagramme ci-contre. Il doit presser les cordes entre des frettes\* particulières, et il peut faire cela avec deux doigts ou avec trois doigts.



Les guitaristes préfèrent certains arrangements à deux ou à trois doigts. Cependant, dans ce projet, vous devez considérer tous les arrangements de doigts possibles qui satisfont aux conditions suivantes.

**À noter :** On assigne des numéros aux quatre doigts de la main gauche, comme suit.

Le 1<sup>er</sup> doigt = l'index

Le 2<sup>e</sup> doigt = le majeur

Le 3<sup>e</sup> doigt = l'annulaire

Le 4<sup>e</sup> doigt = le petit doigt

\* séparations placées sur le manche de la guitare où l'on place les doigts pour raccourcir les cordes

## Positionnement de la main gauche

1. Un guitariste qui se sert de deux doigts pour jouer cet accord de *ré* (D) pourrait utiliser un doigt en tant que « barré »\* entre la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> frette, afin d'exercer de la pression en même temps sur les 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> cordes. Il utiliserait un autre doigt entre la 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> frette, afin d'exercer de la pression sur la 5<sup>e</sup> corde seulement. Dans ce cas, la 5<sup>e</sup> corde est pressée deux fois : une fois avec le doigt utilisé comme barré et une fois avec l'autre doigt.

Dans l'image ci-contre, on montre un exemple de positionnement de deux doigts pour jouer un accord de *ré* (D).



Pour jouer un accord de *ré* (D) avec deux doigts, un guitariste doit utiliser :

- soit le 1<sup>er</sup> doigt soit le 2<sup>e</sup> doigt comme barré
  - un doigt qui porte un numéro supérieur au doigt utilisé comme barré pour exercer de la pression sur la 5<sup>e</sup> corde
- Combien d'arrangements différents des deux doigts le guitariste peut-il utiliser pour jouer l'accord de *ré* (D)?
- \* le doigt est placé sur le manche de la guitare pour exercer de la pression sur deux ou plusieurs cordes

2. Quand il joue l'accord de *ré* (D) à trois doigts, un guitariste utilise un doigt différent sur chaque corde. Dans l'image ci-contre, on montre un exemple de positionnement des trois doigts pour jouer un accord de *ré* (D).



Pour jouer un accord de *ré* (D) avec trois doigts, un guitariste doit utiliser :

- n'importe lequel des 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> doigts pour exercer de la pression sur la 4<sup>e</sup> et la 6<sup>e</sup> corde ou sur la 6<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup> corde
  - un doigt qui porte un numéro supérieur (3<sup>e</sup> ou 4<sup>e</sup>) aux deux doigts utilisés pour exercer de la pression sur la 4<sup>e</sup> et la 6<sup>e</sup> corde afin de presser la 5<sup>e</sup> corde
- Combien d'arrangements différents des trois doigts le guitariste peut-il utiliser pour jouer cet accord de *ré* (D)?

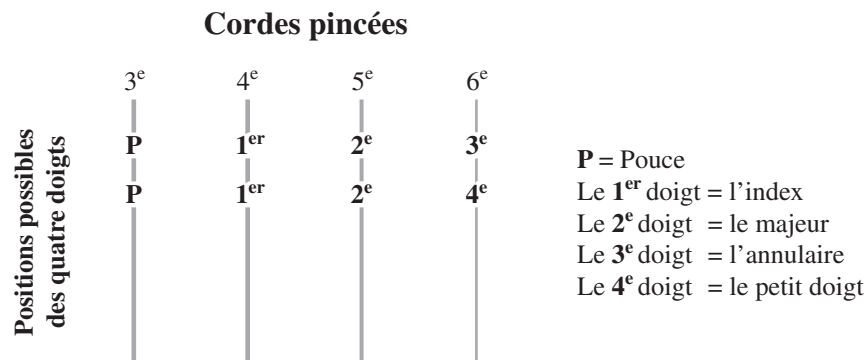
### Positionnement de la main droite

3. Une fois qu'il a positionné sa main gauche, le guitariste peut jouer un accord de *ré* (D) en pincant les 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> cordes.

Pour pincer les cordes, il peut utiliser ses doigts de la main droite, y compris le pouce. Les conditions qui s'appliquent sont :

- la 3<sup>e</sup> corde est pincée soit par le pouce soit par le 1<sup>er</sup> doigt
- la 4<sup>e</sup> corde est pincée soit par le 1<sup>er</sup> doigt soit par le 2<sup>e</sup> doigt
- la 5<sup>e</sup> corde est pincée soit par le 2<sup>e</sup> doigt soit par le 3<sup>e</sup> doigt
- la 6<sup>e</sup> corde est pincée soit par le 3<sup>e</sup> doigt soit par le 4<sup>e</sup> doigt
- une fois qu'on utilise un doigt pour pincer une corde, on ne peut plus l'utiliser de nouveau

- On montre ci-dessous deux des choix que le guitariste peut utiliser pour pincer les cordes. Énumérez les trois autres choix et expliquez pourquoi le nombre de choix est  ${}_5C_4$ .



- En se servant de ses doigts, y compris le pouce, comme on l'a déterminé ci-dessus, le guitariste peut pincer les 4 cordes de la guitare (3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup>) dans n'importe quel ordre. Quel est le nombre total d'ordres différents dans lesquels il pourrait pincer les 4 cordes de la guitare? Montrez comment vous avez obtenu votre solution.
4. Le guitariste a décidé que pour jouer cet accord de *ré* (D), il va pincer les 4 cordes de la guitare dans un ordre ascendant (3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup>) ou dans un ordre descendant (6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>). Déterminez le nombre total d'arrangements que le guitariste peut utiliser pour placer ses doigts de la main gauche **et** pincer les cordes avec sa main droite.

## Partie D

1. Faites des recherches sur le lien entre les mathématiques et la tension et la longueur des cordes d'une guitare ou d'un violon dans la production des fréquences des sons. La liste suivante de sites Internet pourrait vous être utile dans vos recherches.

Site en français :  
[www.chez.com/dhu/guitare.htm](http://www.chez.com/dhu/guitare.htm)

Sites en anglais :  
[www.noyceguitars.com/Technotes/Articles/T3.html](http://www.noyceguitars.com/Technotes/Articles/T3.html)  
[www.tenet.edu/teks/math/clarifying/algebra1/music.pdf](http://www.tenet.edu/teks/math/clarifying/algebra1/music.pdf)  
[www.playtheguitar.com/](http://www.playtheguitar.com/)  
[www.csm.astate.edu/music.html](http://www.csm.astate.edu/music.html)

2. Lorsque deux sons ayant des fréquences légèrement différentes sont produits en même temps (par exemple, lorsqu'on accorde la corde d'un violon ou d'une guitare à l'aide d'un diapason), des variations d'intensité du son se produisent à des intervalles réguliers. Les variations périodiques de l'intensité du son s'appellent des « battements ».

On utilise l'identité ci-dessous pour déterminer la fonction trigonométrique qui décrit le battement produit.

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \text{ où } A \neq B.$$

Complétez une preuve de cette identité. Comme première étape du côté gauche, réécrivez  $\cos A$  sous la forme  $\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right)$  et  $\cos B$  sous la forme  $\cos\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right)$ .

3. Écoutez des régularités musicales algorithmiques déterminées par divers concepts mathématiques (permutations, fonctions trigonométriques, triangle de Pascal, etc.) et expliquez quelles régularités vous avez aimées le plus et quelles régularités vous avez aimées le moins.

**OU**

Concevez votre propre algorithme musical à partir d'un autre principe ou concept mathématique (vous pouvez même le présenter devant la classe). Vous pourriez utiliser le site Internet (en anglais) suivant : [www.geocities.com/Vienna/9349/](http://www.geocities.com/Vienna/9349/)

**À noter :** Les adresses des sites Internet changent parfois. Si les sites Internet ci-dessus ne sont plus disponibles, utilisez un moteur de recherche et tapez des mots clés tels que "Frequency and String Tension" (fréquence et tension des cordes) ou "Mathematics and Music" (les mathématiques et la musique).

## ***Référence bibliographique***

Page 1 : Citation de Charity Vaughan Kahn. Trouvée à <http://charitykahn.com/musimatics/> telle que citée dans le livre *Math and Music: Harmonious Connections*, de Charity Vaughan Kahn et Trudi Hammel Garland. Dale Seymour Publications, © février 1995. Utilisée et traduite avec permission.