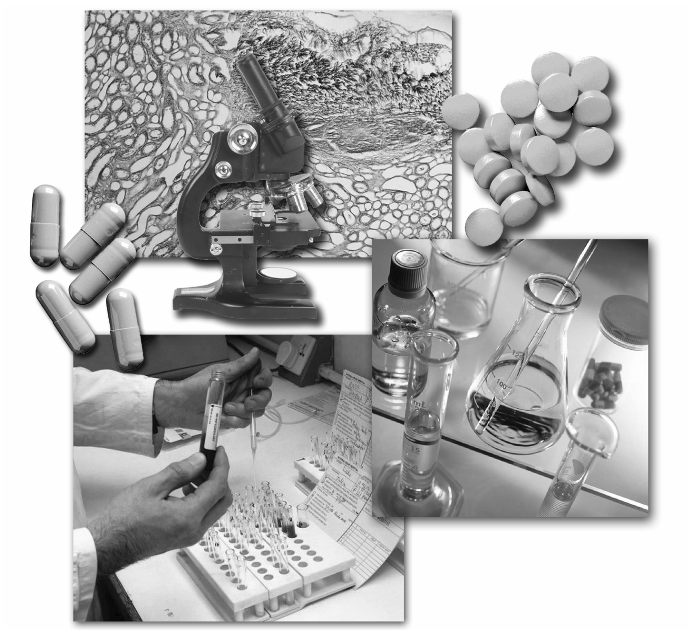
Mathématiques pures 30

Projet à l'intention des élèves : Applications des fonctions exponentielles



Septembre 2006

Alberta EDUCATION

Dans le présent document, le générique masculin est utilisé sans aucune discrimination et dans le seul but d'alléger le texte.

Mathématiques pures 30

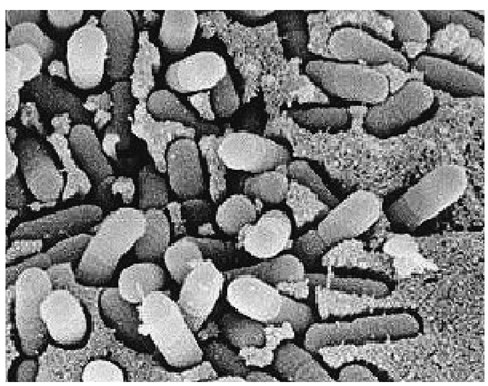
Projet : Applications des fonctions exponentielles

Introduction

Dans son livre *The Andromeda Strain* (1969), Michael Crichton avertit ses lecteurs que la croissance non contrôlée d'une seule bactérie *E. coli* est un phénomène effrayant parce que, dans des conditions idéales, la croissance exponentielle d'une population de bactéries pourrait produire une supercolonie.

Les bactéries *E. coli* se reproduisent par une simple division cellulaire, qu'on appelle aussi « fission binaire ». Dans des conditions idéales, une population de bactéries *E. coli* peut doubler toutes les 20 minutes. Les bactéries *E. coli* qui vivent dans le gros intestin des humains sont inoffensives, mais quand elles sont ingérées, elles peuvent causer la diarrhée, qui mène à une déshydratation grave et même à la mort de la personne. On trouve ces bactéries dangereuses dans l'eau polluée et dans des aliments contaminés ou pas assez cuits.

Escherichia coli



Ce projet porte sur l'envergure de la croissance exponentielle des bactéries, sur l'efficacité des antibiotiques dans le traitement des infections bactériennes et sur d'autres applications pratiques des fonctions exponentielles.

Partie A

1. Supposez qu'une population de bactéries *E. coli* double toutes les 20 minutes. Faites un tableau qui montre la croissance de la population d'une seule bactérie *E. coli* pendant une période de 2 heures.

2. Écrivez une équation qui représente le nombre de bactéries *E. coli*, N, en fonction du temps, t.

3. Utilisez l'ordinateur et/ou la calculatrice à affichage graphique pour représenter cette croissance exponentielle de la façon suivante. Dressez trois listes.

- Dans la première liste, (L_1), entrez les nombres de 0 à 8 pour représenter la période de temps, où
  - 0 représente le stade initial à 0 min
  - 1 représente le temps à 20 min
  - 2 représente le temps à 40 min et ainsi de suite

- Dans la deuxième liste (L_2), entrez le nombre de bactéries présentes à chaque période de temps de la façon suivante :
  - notez 1 dans la première cellule
  - notez 2 dans la deuxième cellule
  - notez 4 dans la troisième cellule et ainsi de suite

- Dans la troisième liste, (L_3), entrez le logarithme à base 2 de la liste 2 (à savoir $\log_2 L_2$).

Tracez le graphique de L_2 en fonction de L_1. Utilisez la fonction de régression exponentielle de votre ordinateur ou de votre calculatrice à affichage graphique pour trouver l'équation du graphique. Comparez cette équation à l'équation de la croissance bactérienne que vous avez écrite à la question 2. Est-ce qu'elles diffèrent l'une de l'autre? Expliquez pourquoi elles diffèrent ou pourquoi elles ne diffèrent pas.

4. La bactérie *E. coli* est très répandue à cause de son taux de croissance rapide et à cause de sa capacité de muter et de produire des variations qui peuvent survivre dans différentes conditions environnementales. On estime qu'après qu'une population de *E. coli* s'est divisée 30 fois, environ 1,5 % des cellules seront mutantes. Utilisez votre graphique de L_2 en fonction de L_1 pour estimer le nombre de bactéries présentes après 30 périodes de doublement. Combien de ces bactéries, au million près, seraient mutantes?

5. Tracez le graphique de L_3 en fonction de L_1. Quel type de graphique avez-vous obtenu? Déterminez l'équation de ce graphique. Expliquez comment cette équation est liée à l'équation du graphique de L_2 en fonction de L_1.

Partie B

Une colonie de bactéries a une population initiale de 2 000 bactéries et augmente à un taux de 40 %/h. Un antibiotique, l'antibiotique *A*, est administré toutes les 3 h et a un facteur d'efficacité de 75 %, ce qui signifie qu'après qu'une personne aura pris une dose de l'antibiotique, 75 % des bactéries existantes seront immédiatement tuées.

1. Étant donné que la première dose de l'antibiotique *A* est administrée au temps $t = 0$ h et que seul le nombre de bactéries qui survivent augmente pendant la période de 3 h, on peut déterminer le nombre de bactéries qui ont survécu après les 3 h comme suit :

$$\begin{aligned} 2\,000(1 - 0{,}75) &= 2\,000(0{,}25) \\ &= 500 \text{ bactéries qui ont survécu après l'administration de la dose} \end{aligned}$$

$$\text{alors, } 500(1{,}40)^3 \doteq 1\,372 \text{ bactéries après } 3 \text{ h, avant l'administration de la deuxième dose}$$

- Déterminez la population bactérienne 6 h après l'administration de l'antibiotique *A* (avant l'administration de la troisième dose).

- Déterminez la population bactérienne 9 h après l'administration de l'antibiotique *A* (avant l'administration de la quatrième dose).

- Complétez le tableau ci-dessous et utilisez la régularité établie pour exprimer le nombre de bactéries, *N*, présentes avant l'administration d'une dose, sous la forme d'une fonction exponentielle du temps, *t*, où *t* est un multiple exact de 3.

Ce tableau montre comment la population bactérienne change quand on administre l'antibiotique *A*.

	Population de bactéries				
Temps (h)	0	3	6	9	t
Nombre de bactéries (N)	2 000	1 372			

- On considère qu'un patient est « guéri » lorsque la population bactérienne est inférieure à 50. Si un patient, qui a une population bactérienne initiale de 2 000 bactéries, suit un traitement avec l'antibiotique *A*, combien de cycles de traitement doit-on lui administrer pour qu'il guérisse?

2. Un autre antibiotique, l'antibiotique *B,* est administré toutes les 6 heures et a un facteur d'efficacité de 90 %. Déterminez la population bactérienne après trois jours (72 h) chez un patient qui avait une population bactérienne initiale de 2 000 bactéries et qui suit un traitement avec l'antibiotique *B*.

3. Un troisième antibiotique, l'antibiotique *C*, a un facteur d'efficacité de 99,5 %. Expliquez pourquoi l'antibiotique *C* **ne peut pas** guérir les patients s'il est administré toutes les 24 heures.

Partie C

Le contrôle de la qualité est un aspect important dans la fabrication des antibiotiques. Pendant une opération de fabrication, on produit des lots de l'antibiotique *A* avec des facteurs d'efficacité qui sont normalement distribués, avec une moyenne de 75 % et un écart type de 2 %.

1. Tout lot dont le facteur d'efficacité dépasse 1,5 écart type au-dessous de la moyenne est automatiquement rejeté.

   • Déterminez le facteur d'efficacité minimum d'un lot accepté.

   • Déterminez la probabilité qu'un lot sélectionné au hasard soit rejeté.

2. Une colonie de bactéries a une population initiale de 2 000 bactéries et augmente à un taux de 40 %/h. Toutes les 3 h, on administre l'antibiotique *A*, qui a un facteur d'efficacité minimum. Déterminez le nombre de bactéries après 3 h (avant l'administration de la deuxième dose) et après 6 h (avant l'administration de la troisième dose).

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Pendant une deuxième opération de fabrication, on produit des lots de l'antibiotique A qui ont des facteurs d'efficacité normalement distribués, avec une moyenne de 75 % et un écart type de 5 %. Tout lot dont le facteur d'efficacité dépasse 1,5 écart type au-dessous de la moyenne est rejeté. Par conséquent, le facteur d'efficacité minimum d'un lot accepté est de 67,5 %.

Un patient avec une population initiale de 2 000 bactéries, qui ont le même taux de croissance de 40 %/h, suit toutes les 3 h un traitement avec de l'antibiotique A du lot. Ce lot a un facteur d'efficacité minimum de 67,5 %. Le tableau ci-dessous illustre le nombre de bactéries à 0 h, à 3 h et à 6 h, juste avant l'administration de la première, de la deuxième et de la troisième dose.

Temps (h)	0	3	6
Nombre de bactéries (N)	2 000	1 783	1 588

3. Expliquez pourquoi les fabricants d'antibiotiques devraient s'assurer que l'écart type des facteurs d'efficacité des lots d'antibiotiques soient maintenus à un niveau aussi bas que possible.

Partie D

La ***Partie A*** et la ***Partie B*** de ce projet présentent des exemples de la vie réelle qu'on peut illustrer par une régularité de croissance exponentielle.

1. La communauté médicale a exprimé son inquiétude en ce qui concerne les bactéries mutantes, appelées parfois des « supermicrobes », qui sont résistantes aux antibiotiques. Faites des recherches sur ce problème médical et ensuite, concevez une affiche **ou** un dépliant pour informer le public sur l'utilisation adéquate des antibiotiques. Voici une liste de sites Web (en anglais) qui pourraient vous être utiles dans vos recherches.

www.cdc.gov/drugresistance/community/

www.bbc.co.uk/education/asguru/generalstudies/sciencetechnology/18antibiotics/index.shtml

À noter : Les adresses des sites Web changent parfois. Si les sites Web ci-dessus ne sont plus disponibles, utilisez un moteur de recherche et tapez des mots clés tels que « superbugs » (supermicrobes) ou « antibiotic resistance » (résistance aux antibiotiques).

OU

2. Étudiez un autre exemple de régularité de croissance exponentielle. Faites un graphique qui représente la croissance et écrivez toutes les équations pertinentes et tous les calculs qui s'y rattachent. Discutez des applications de cette régularité dans la vraie vie.