Mathématiques pures 30

Projet à l'intention des élèves : Le parachutisme

Février 2009

Alberta Education

Dans le présent document, le générique masculin est utilisé sans aucune discrimination et uniquement dans le seul but d'alléger le texte.

© 2009, la Couronne du chef de l'Alberta représentée par le ministre de l'Éducation, Alberta Education, Learner Assessment, 44 Capital Boulevard, 10044 108 Street NW, Edmonton, Alberta T5J 5E6, et les détenteurs de licence. Tous droits réservés. On peut télécharger des exemplaires supplémentaires de ce document en visitant le site Web de Alberta Education, à www.education.alberta.ca

Par la présente, le détenteur des droits d'auteur autorise **seulement les éducateurs de l'Alberta** à reproduire, à des fins éducatives et non lucratives, les parties de ce document qui ne contiennent pas d'extraits.

Les extraits de textes de ce document **ne peuvent pas** être reproduits sans l'autorisation écrite de l'éditeur original (voir page de références bibliographiques, s'il y a lieu).

Mathématiques pures 30

Projet — Le parachutisme

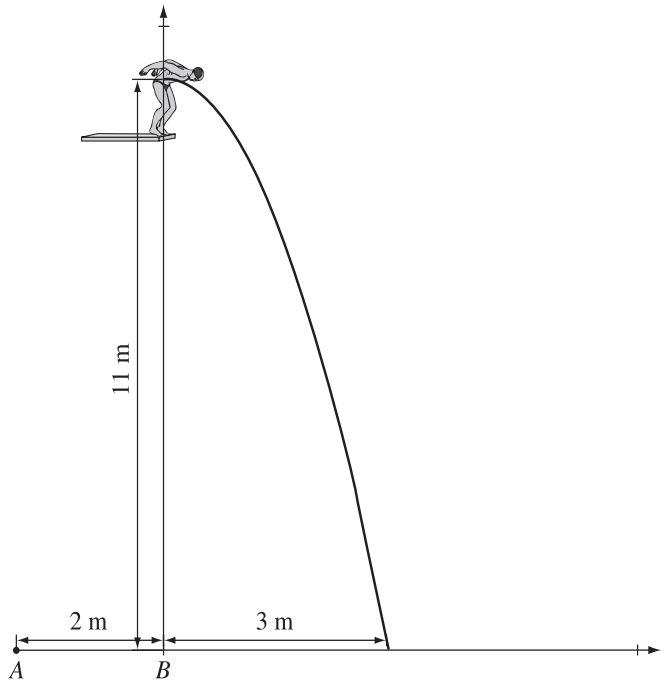
Introduction

Dans ce projet, vous allez étudier le comportement d'objets qui tombent, d'abord en l'absence de la résistance de l'air et ensuite, en présence de la résistance de l'air. La Partie A porte sur les trajectoires paraboliques suivies par les objets en chute libre. La Partie B porte sur l'utilisation des fonctions exponentielles pour décrire les effets de la résistance de l'air sur les objets qui tombent; et la Partie C porte sur la relation entre les facteurs de conception des parachutes et la vitesse limite de chute. Dans la partie D, vous ferez des recherches sur un autre aspect du parachutisme qui vous intéresse.

Partie A

Dans la Partie A, on ignore les effets de la résistance de l'air et si les objets tombent en couvrant des distances relativement courtes, le modèle ci-dessous donne des résultats exacts. Pour des chutes de plus grandes hauteurs, ce modèle donne des résultats très inexacts.

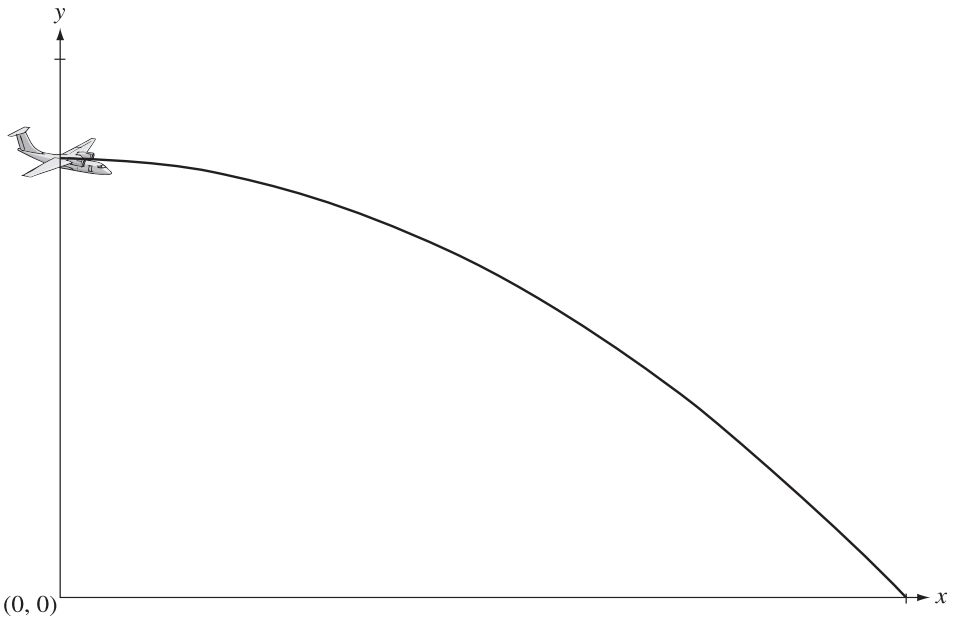
Les plongeurs olympiques de haut-vol exécutent une série de manœuvres complexes à partir d'une plate-forme qui est située à 10 m au-dessus de la surface de l'eau. Un plongeon simple peut être représenté par la trajectoire parabolique montrée dans le diagramme ci-dessous.



1. Si l'origine du plan cartésien se trouve au point B, déterminez la forme standard de l'équation de la trajectoire parabolique.

2. Si l'origine du plan cartésien se trouve au point A, déterminez la forme générale de l'équation de la trajectoire parabolique.

Les objets qui tombent d'un avion en vol suivront eux aussi des trajectoires paraboliques, comme le montre le diagramme ci-dessous. Dans les équations de ces trajectoires, y représente la hauteur au-dessus du sol en mètres et x, la distance horizontale au sol en mètres.



3. Un avion se déplace à 250 m/s à une altitude de 12 250 m lorsqu'un morceau de glace se détache de l'aile de l'avion et tombe au sol en suivant une trajectoire parabolique. S'il n'y a pas de résistance de l'air, la forme standard de l'équation de la trajectoire parabolique est donnée par $y - 12\,250 = -\left(\frac{4{,}9}{62\,500}\right)x^2$. Déterminez algébriquement les coordonnées du point où la glace frappe le sol.

Cette prédiction est loin du comportement observé où la distance horizontale parcourue est d'environ 0,83 km avant que le mouvement vers l'avant s'arrête et que la glace tombe verticalement. On doit tenir compte de la résistance de l'air (voir Partie B) pour faire une prédiction exacte.

Partie B

La résistance de l'air réduira l'accélération descendante nette alors que la résistance de l'air augmentera à de plus grandes vitesses descendantes. Voici les caractéristiques d'un modèle de la résistance de l'air.

- L'accélération verticale, a, est donnée par la fonction $a = g - kv$, où g est l'accélération due à la gravité, v est la vitesse verticale descendante et k est une constante dépendante des dimensions et de la forme de l'objet en chute.

- Après quelque temps, l'objet tombe avec une vitesse constante appelée vitesse limite de chute, v_l. À ce moment-là, la force descendante due à la gravité est exactement égale à la force montante due à la résistance de l'air et l'accélération verticale est zéro. À la vitesse limite de chute, $a = 0$ et, par conséquent, $0 = g - kv_l$ ou $v_l = \frac{g}{k}$.

1. Pour un être humain en chute libre, $k = 0{,}15$/s, et pour un parachutiste, $k = 2{,}00$/s. Si l'accélération due à la gravité est de $9{,}81\ \text{m/s}^2$, déterminez les vitesses limites de chute, au dixième de mètre par seconde près, de l'être humain en chute libre et du parachutiste.

2. Décrivez les effets qu'aurait le changement de la valeur de k sur la vitesse limite de chute de l'objet.

On peut écrire l'équation de la vitesse verticale, v, en fonction du temps, t, en se référant à la vitesse limite de chute, v_l, et à la base, b, d'une fonction exponentielle. La forme plus simple de l'équation est $v = v_l(1 - b^t)$, où v_l et b dépendent de la forme de l'objet en chute.

3. La glace qui tombe de l'aile d'un avion a une vitesse limite de chute de 45 m/s. Une équation qui décrit la vitesse verticale de la glace qui tombe en fonction du temps est $v = 45\left(1 - (0{,}804)^t\right)$. Déterminez la vitesse verticale, au dixième de mètre par seconde près, de la glace qui tombe après 12,0 s.

4. L'équation qui décrit la vitesse descendante de la glace qui tombe de l'aile de l'avion en fonction du temps est $v = 45\left(1 - (0{,}804)^t\right)$. Déterminez algébriquement le temps requis, au dixième de seconde près, pour que la glace atteigne une vitesse de 98 % de sa vitesse limite de chute de 45 m/s.

Partie C

Les parachutes sont conçus pour minimiser l'impact d'un parachutiste avec le sol. Les parachutes typiques limitent la vitesse limite de chute du parachutiste à une valeur située entre 4,50 m/s et 6,10 m/s, ce qui équivaut à un saut à partir d'une plate-forme de 1,00 m à 1,90 m au-dessus du sol.

1. Si l'accélération due à la gravité est de 9,81 m/s^2, déterminez l'étendue des valeurs de k, au centième près, qui correspond aux vitesses limites de chute situées entre 4,50 m/s et 6,10 m/s. Utilisez la formule $v_l = \frac{g}{k}$ et exprimez votre réponse sous forme d'inégalité.

2. Pour un certain type de parachute d'entraînement, les valeurs de k sont normalement distribuées avec une moyenne de 2,13/s et un écart type de 0,04/s. Déterminez la probabilité, au centième près, que la valeur de k soit supérieure ou égale à 2,08/s.

3. On trouve que 99 % d'un certain type de parachute sportif ont des valeurs de k supérieures ou égales à 1,650/s. Si la valeur moyenne de k est de 1,730/s, déterminez l'écart type, au millième près, de la distribution des valeurs de k.

4. Pour les parachutistes débutants, la vitesse limite de chute doit être inférieure à 5,00 m/s et les parachutes utilisés ont une valeur de k qui est normalement distribuée avec une moyenne de 2,05/s et un écart type de 0,04/s. Si l'accélération due à la gravité est de 9,81 m/s^2, déterminez la probabilité, au millième près, que la vitesse limite de chute soit inférieure à 5,00 m/s.

Partie D

1. La conception des parachutes a évolué au fil des ans, permettant aux parachutistes de sauter à partir de plus grandes altitudes et leur donnant plus de contrôle sur la façon dont ils atterrissent et sur l'endroit où ils atterrissent. Faites des recherches sur différents types de parachutes et comparez deux types de parachutes en vous référant à la façon dont chacun résout les problèmes de grande altitude et de précision du saut.

2. Les sauteurs à skis volent dans les airs de sorte que la résistance de l'air est très petite en direction horizontale, mais très grande en direction verticale. Expliquez pourquoi cela permet au sauteur à skis d'atteindre une vitesse horizontale de départ plus grande, de rester dans les airs pendant une plus longue période de temps et de sauter en couvrant une plus longue distance. Appuyez vos explications à l'aide d'exemples numériques.

Pour obtenir plus d'information sur le thème de ce projet, vous pouvez utiliser les sites Internet suivants :

www.seed.slb.com/fr/scictr/lab/parachute/notes.htm
(construire et tester des parachutes à l'école)

www.mccaviation.ch/fr/sos.php
(conception et spécifications des parachutes commerciaux)

www.eurosport.fr/sautaski/l'abc-du-saut-a-skis_sto829218/story.shtml?menu=6199
(saut à skis – le site décrit la plupart des concepts clés)

www.vancouver2010.com/fr/athltes-et-sports/sports/-/40876/34238/169ofm5/ski-jumping.htm
(Le site contient des liens à des sites techniques – en français et en anglais – portant sur la construction des pentes de ski et des sauts à ski.)

À noter : Les adresses Internet changent parfois. Si les sites Internet indiqués ci-dessus ne sont plus disponibles, utilisez un moteur de recherche et tapez des mots clés tels que ceux énumérés ci-dessous :

« Conception des parachutes » (en anglais, parachute design)

« Histoire du parachutisme » (en anglais, parachute history)

« Saut à skis » (en anglais, ski jumping)

« Techniques de saut à skis » (en anglais, ski jumping techniques)